

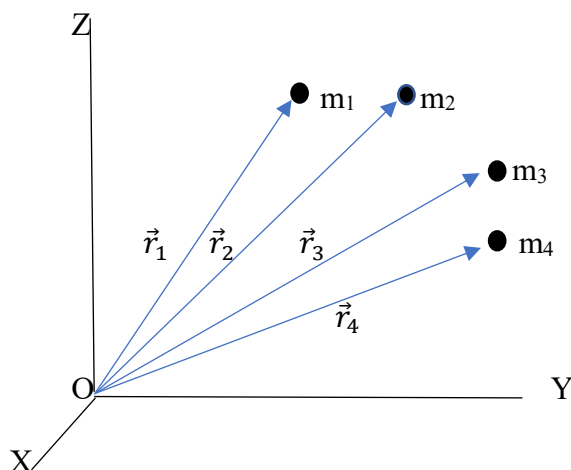
TEMA 5. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS

1. Introducción

En este tema se amplía la representación realizada de la cinemática y dinámica de una partícula a un sistema de partículas. Hemos utilizado hasta ahora el modelo de punto material para el estudio de la dinámica de los cuerpos de dimensiones finitas. Esta aproximación es válida cuando las dimensiones del cuerpo son despreciables frente a las de la trayectoria que describe. ¿Qué ocurre cuando hay que considerar las dimensiones del objeto que estamos estudiando? En este caso habremos de crear un nuevo modelo que nos permita estudiar la evolución temporal en los casos en los que la aproximación de punto material no sea válida.

2. Sistema de partículas y sólido rígido.

Desde el punto de vista dinámico, un sistema de partículas se entiende como un cuerpo que se considera formado por un conjunto finito de puntos materiales, y, por lo tanto, con una estructura discreta. Es la aproximación siguiente a la del punto material. Estrictamente hablando, cualquier cuerpo a nivel microscópico (es decir, teniendo en cuenta su estructura a nivel molecular o atómico) tiene una estructura discreta, y está compuesto por un número muy elevado de puntos materiales. Sin embargo, para explicar su comportamiento a nivel macroscópico, se le considera formado por una distribución continua de materia y se considera que llena completamente el espacio que ocupa. El concepto de continuidad de la materia es el postulado fundamental de la Mecánica de los Medios Continuos.



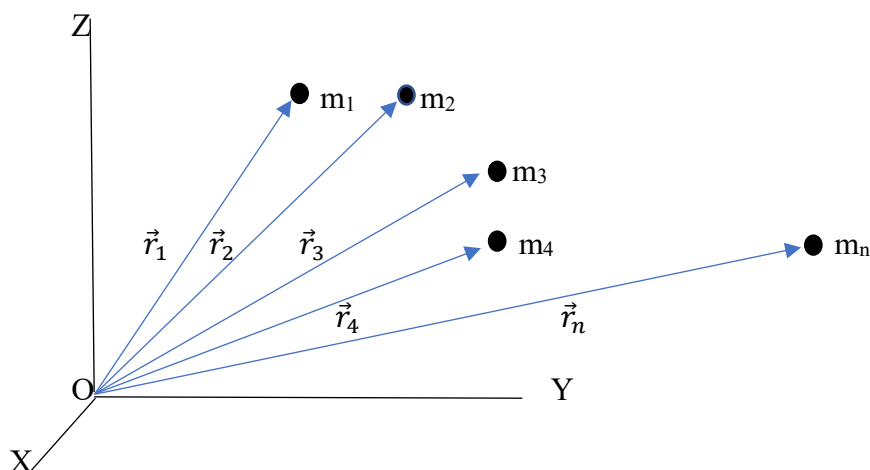
Dentro de los sistemas de partículas se pueden distinguir los sistemas deformables y los no deformables (sólido rígido). Los primeros son aquellos en los cuales la distancia relativa entre las partículas de un sistema puede cambiar en el transcurso del tiempo, mientras que en los segundos dicha distancia permanece constante, sean cuales fueren las perturbaciones que recibe el sistema. Evidentemente, los sólidos reales solo cumplen esta condición de manera aproximada.

A la hora de realizar un estudio de un sistema de puntos materiales, hemos de suponer que se verifica el siguiente principio: en el movimiento de un sistema de partículas, podemos considerar como si cada partícula se moviera libremente bajo la acción de las fuerzas, tanto interiores (entre las propias partículas) como exteriores al sistema, que sobre aquél actúan.

2. Centro de masas

En lo que sigue entenderemos por sistema de partículas un conjunto de ellas limitado por una superficie cerrada (real o imaginaria) que lo separa del resto del Universo. Ejemplos: moléculas de un gas contenido en un recipiente, el Sistema Solar, etc.,

Supongamos un sistema de n partículas de masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, cuyas posiciones respecto del origen O de un sistema de referencia están definidas por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, como se ve en la siguiente figura:



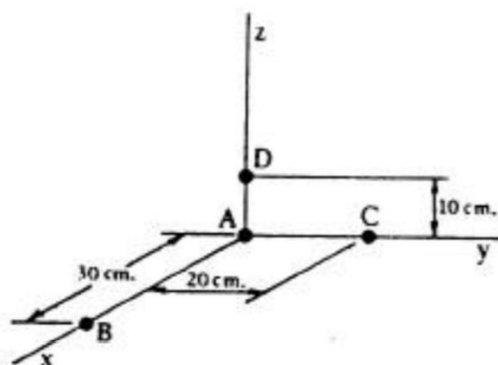
Cuando, en el transcurso del tiempo, el sistema evolucione, cada uno de sus puntos describirá una trayectoria con velocidades $\vec{v}_i$, y aceleraciones $\vec{a}_i$. Sobre cada una de las partículas del sistema actuará una fuerza total que será la suma de las fuerzas que tengan origen externo al sistema, es decir, que sean causadas por agentes físicos distintos de las partículas que forman el sistema, más las fuerzas que, actuando sobre cada partícula, sean debidas a la acción del resto de las partículas del sistema. Por ejemplo, la fuerza total $\vec{F}_1$ que actúa sobre la partícula 1 se expresará:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

La **posición del centro de masas (c.d.m.)** se determina ponderando las posiciones de cada una de las partículas de acuerdo con sus masas respectivas, por lo que, para un sistema discreto de puntos, la expresión de la posición del c.d.m. vendrá dada por la ecuación:

$$\vec{r}_{\text{cdm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas del c.d.m. del sistema formado por los cuatro puntos materiales, A, B, C y D distribuidos según la figura. Datos: $m_A = 100 \text{ g}$, $m_B = 200 \text{ g}$, $m_C = 150 \text{ g}$, $m_D = 50 \text{ g}$.



Solución:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{cdm}} &= \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C + m_D \vec{r}_D}{m_A + m_B + m_C + m_D} = \\ &= \frac{0,1 \cdot (0 \ 0 \ 0) + 0,2 \cdot (0,3 \ 0 \ 0) + 0,15 \cdot (0 \ 0,2 \ 0) + 0,05 \cdot (0 \ 0 \ 0,1)}{0,1 + 0,2 + 0,15 + 0,05} = \\ &= (0,12 \ 0,06 \ 0,01) \text{ m} \end{aligned}$$

Si la distribución de masa es continua, el sumatorio se transforma en integral:

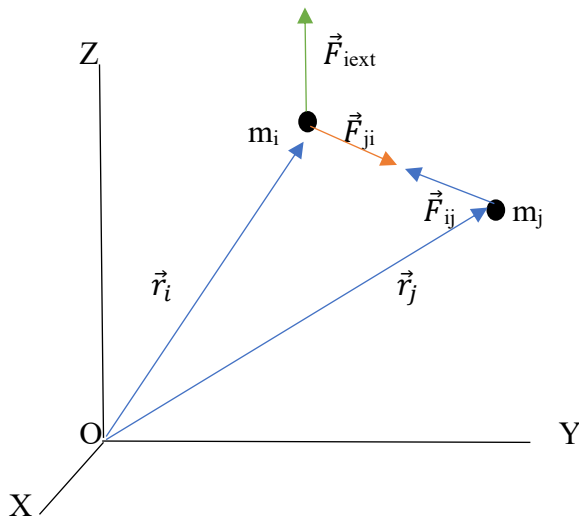
$$\vec{r}_{\text{cdm}} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{m}$$

Donde $dm = \rho dV$, V representa el volumen del sistema y ρ la densidad, que en principio es función de la posición: $\rho = \rho(x, y, z)$.

Si la distribución de masa es uniforme (sistema homogéneo), la densidad ρ es constante, con lo que el cálculo de las coordenadas del c.d.m. es más sencillo.

2.1. Movimiento del centro de masas

A la hora de abordar el estudio de un sistema de puntos materiales o partículas, es preciso distinguir entre las fuerzas exteriores, que actúan sobre las partículas y proceden del exterior del sistema, y las fuerzas interiores o interacciones, que ejercen sobre cada partícula todas las demás.



Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partículas, obtenemos tantas ecuaciones como partículas. Particularizando para la partícula i :

$$\underbrace{\vec{F}_{iext}}_{\substack{\text{suma de fuerzas} \\ \text{exteriores sobre } i}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij}}_{\substack{\text{suma de fuerzas} \\ \text{interiores sobre } i}} = m_i \vec{a}_i$$

Con respecto a las fuerzas interiores, supondremos que se cumple la tercera ley de Newton (acción-reacción), es decir, las fuerzas entre dos partículas son iguales y opuestas, y están contenidas en la recta que las une. Por tanto, extendiendo a todas las partículas del sistema:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iext}}_{\vec{F}_{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij}}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (*)$$

Donde el segundo sumando es 0 precisamente por la suposición de la ley de acción-reacción.

A partir de la expresión vista previamente para la posición del centro de masas:

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{M} \cdot \vec{r}_{cdm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} (M \cdot \vec{r}_{cdm}) = \\ &= M \cdot \frac{d^2 \vec{r}_{cdm}}{dt^2} = M \cdot \vec{a}_{cdm} \end{aligned}$$

Lo cual indica que el centro de masas se mueve como si la resultante de las fuerzas externas actuase sobre la masa total del sistema concentrada en dicho punto, sin que las fuerzas interiores afecten al movimiento, es decir, **el centro de masas del sistema se mueve como si fuera un punto material de masa igual a la masa total del sistema y actuase sobre él la resultante de las fuerzas externas.**

3. Momentos lineal y angular

3.1. Momento lineal de un sistema de partículas

El momento lineal o cantidad de movimiento total de un sistema de partículas se define como el vector:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

Como la definición de momento lineal es $\vec{p} = m\vec{v}$, podemos poner:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Podemos expresar el momento total usando el centro de masas del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \underbrace{m_i}_{M} \cdot \vec{v}_{cdm}$$

siendo $\vec{v}_{cdm}$ la velocidad del centro de masas, tal que:

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Si estudiamos la variación del momento total:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_{cdm}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{v}_{cdm}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{cdm}$$

Y como hemos visto anteriormente:

$$\vec{F}_{ext} = M \cdot \frac{d^2 \vec{r}_{cdm}}{dt^2} = M \cdot \vec{a}_{cdm}$$

Por tanto:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

La cantidad de movimiento de cada partícula individual de un sistema puede cambiar tanto por la acción de fuerzas internas como externas, pero el cambio en el momento total solo se debe a las fuerzas externas. Esto nos ofrece ventajas a la hora del estudio de la evolución temporal de un sistema a partir del movimiento que tiene el centro de masas del mismo.

Un ejemplo sencillo es el siguiente: si imaginamos un proyectil lanzado por un cañón, y dicho proyectil explota en el aire, el c.d.m. de los fragmentos continuará describiendo la parábola original. El peso es la única fuerza externa que actúa y o cambia al producirse la explosión, ya que la fuerza gravitatoria es constante en las proximidades de la superficie terrestre.

3.2. Momento angular de un sistema de partículas

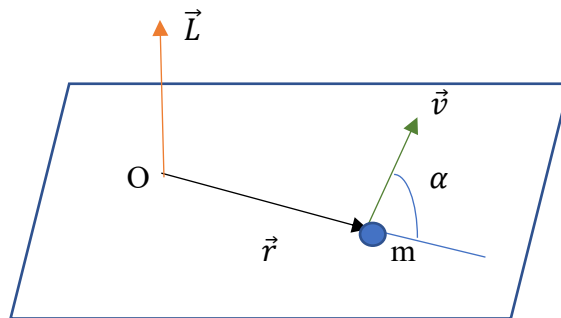
La Primera ley de Newton nos habla sobre la tendencia de un objeto a conservar su estado de movimiento (reposo o MRU) salvo que actúen fuerzas. Una vez que, por ejemplo, una rueda se encuentra en rotación con MCU, su tendencia es la de seguir girando con MCU. Este hecho pone en evidencia la existencia de una magnitud similar al momento lineal, pero relacionada con el movimiento de rotación. Esta magnitud es el **momento angular o cinético $\vec{L}$** .

Sea una partícula de masa m con velocidad $\vec{v}$ que gira en torno a un punto O que se encuentra a una distancia $|\vec{r}|$

Se define el momento angular $\vec{L}$ como la cantidad de movimiento de rotación de un objeto. Su definición matemática es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Sus unidades SI son $\frac{kg \cdot m^2}{s}$.



Características:

- **Módulo:** $|\vec{L}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}| \sen \alpha = m \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{r}| \sen \alpha$
- **Dirección:** perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$.

- **Sentido:** determinado por la regla del sacacorchos, es decir, el sentido de avance de un sacacorchos que gira desde $\vec{r}$ hasta $\vec{v}$, coincidiendo el origen de ambos y por el camino más corto. Así, el **momento angular** está dirigido **hacia arriba** cuando el giro es **antihorario** y **hacia abajo** cuando es en sentido **horario**.

El momento angular respecto de un punto O cuando $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son paralelos es nulo, pues es ese caso $\sin \alpha = 0$.

En el caso de un sistema de partículas, definimos el momento total del sistema $\vec{L}$ con respecto a un punto O como la suma de los momentos angulares individuales $\vec{L}_i$ de todas las partículas con respecto al mismo punto O:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

¿Existe una relación similar a la del momento lineal total (con respecto al c.d.m.) para el momento angular total?

Sea $\vec{r}_i$ el vector de posición de la partícula m_i con respecto a O, $\vec{R}$ el vector de posición del centro de masas, también con respecto a O, y $\vec{r}_i^*$ el radio vector de la partícula m_i con respecto al centro de masas. En ese caso tenemos:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{R}$$

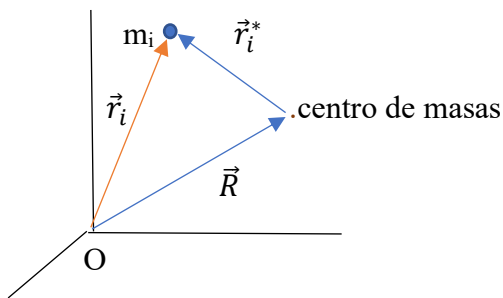
Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i^*}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_{cdm}$$

Sustituyendo y operando, queda:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times M \cdot \vec{v}_{cdm}}_{\vec{L}_{cdm}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*}_{\vec{L}_i^*}$$

Es decir, el momento angular total es igual al momento angular del centro de masas considerado como punto material, más el momento angular debido al movimiento del sistema alrededor del propio centro de masas.

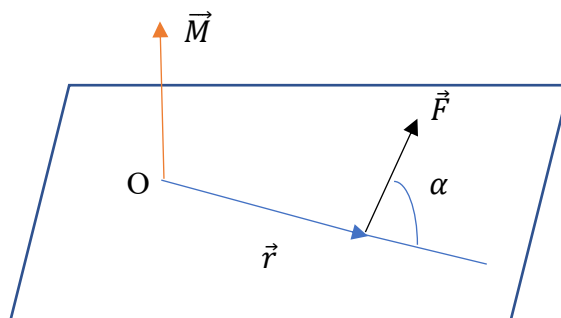


4. Momento de una fuerza. Teorema de Varignon

Se define el momento de una fuerza como la magnitud vectorial responsable del giro de un cuerpo. Se calcula respecto de un punto O. Su unidad en el SI es el **newton metro (N·m)**.

Su expresión matemática es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

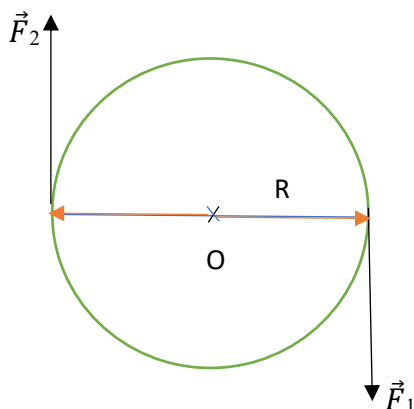


Características:

- **Módulo:** $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha$
- **Dirección:** perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{r}$ y la fuerza $\vec{F}$.
- **Sentido:** **positivo** en sentido **antihorario** y **negativo** en sentido **horario** (regla del sacacorchos).

El momento de una fuerza respecto de un punto contenido en su línea de acción es nulo, pues es ese caso $|\vec{r}| \text{ sen } \alpha = 0$.

Un caso especial es el del **par de fuerzas**, que consiste en un conjunto de 2 fuerzas paralelas de igual módulo y sentido contrario. El efecto conjunto de ambas es provocar el giro del cuerpo sobre el que actúan.



$$|\vec{M}_1| = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{R}| \text{ sen } 90^\circ = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{R}|$$

$$|\vec{M}_2| = |\vec{F}_2| \cdot |\vec{R}| \text{ sen } 90^\circ = |\vec{F}_2| \cdot |\vec{R}|$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$$

Momento total:

$$|\vec{M}| = 2 \cdot |\vec{F}| \cdot |\vec{R}|$$

Diremos que un sistema de partículas está en **equilibrio rotacional** cuando el **momento resultante** (calculado con respecto a cualquier punto) del conjunto de fuerzas que actúa sobre él es **nulo**:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$$

Teorema de Varignon

Dadas varias fuerzas concurrentes, el momento resultante de las distintas fuerzas es igual al momento de la resultante de ellas, aplicada en el punto de concurrencia.

4. Fuerzas centrales

Se dice que una fuerza es central cuando el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza $\vec{F}$ son paralelos. En este caso, el momento de la fuerza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$.

De esta definición podemos deducir unas importantes consecuencias, como veremos a continuación. Derivando el momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) =$$

$$= m \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times \underbrace{m \cdot \vec{a}}_{\vec{F}} = \underbrace{\vec{M}}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{de} \\ \text{una fuerza}}}$$

Si la fuerza es central, $\vec{M} = 0$, y entonces:

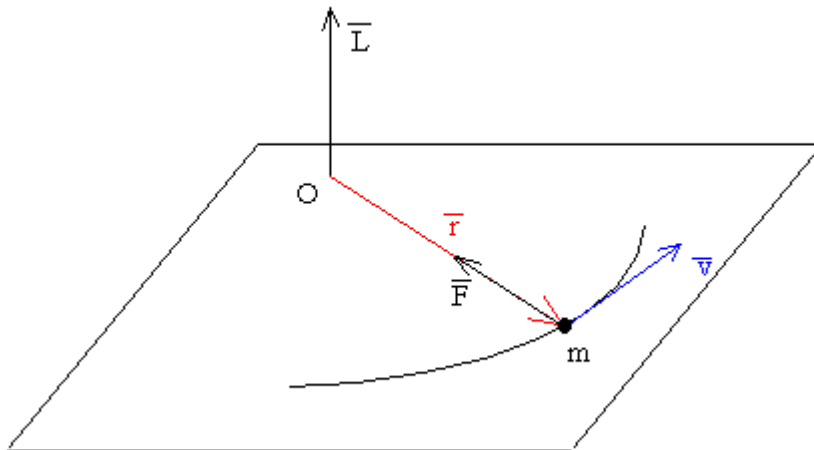
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Es decir, el momento angular $\vec{L}$ se mantiene constante en el tiempo en dirección, módulo y sentido.

Al permanecer constante en dirección, como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ estarán contenidos en un plano perpendicular a la dirección del vector $\vec{L}$. Por tanto, la trayectoria del objeto estará contenida en dicho plano, como se ve en la figura:



Al ser constante en sentido, el sentido del recorrido sobre la trayectoria será siempre el mismo.

Al ser constante en módulo, en cada punto de la trayectoria se cumple:

$$|\vec{L}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}| \operatorname{sen} \alpha = m \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{r}| \operatorname{sen} \alpha = cte$$

Los casos más conocidos de fuerzas centrales son la fuerza de atracción gravitatoria (Ley de Newton de gravitación universal) y la electrostática (Ley de Coulomb), ambas proporcionales a la inversa del cuadrado de la distancia $\frac{1}{|\vec{r}|^2}$. Otro ejemplo es la fuerza en un oscilador armónico (Ley de Hooke), proporcional a $-|\vec{r}|$.

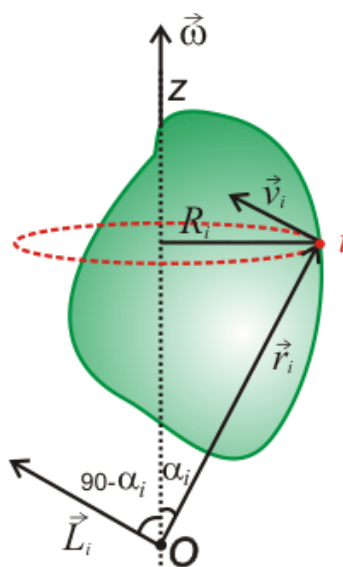
El teorema de Bertrand, demuestra que tanto las fuerzas del tipo $F(|\vec{r}|) = -\frac{k}{|\vec{r}|^2}$ y del tipo $F(|\vec{r}|) = -k|\vec{r}|$ son el único tipo de fuerzas centrales en las que podemos encontrar órbitas cerradas estables.

5. Sólido rígido

El sólido rígido constituye un caso particular de los sistemas de partículas, en el que las distancias entre ellas son constantes y no varían durante el movimiento.

Todo sólido rígido puede experimentar tres tipos de movimientos diferentes: el movimiento de traslación, aquel en el que todas las partículas del sólido se desplazan en trayectorias paralelas y misma velocidad, el movimiento de rotación alrededor de un eje, y el tercer movimiento es una combinación de los dos anteriores.

5.1. Momento angular del sólido rígido. Momento de inercia



Consideremos un sólido que gira alrededor de un eje (elegimos en este caso el eje Z). Cada una de las partículas del sólido describen un movimiento circular de velocidad angular ω alrededor del eje de giro. Si calculamos el momento angular de cada partícula con respecto a O:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

El momento angular del sólido rígido será la suma para todas las partículas que forman parte del sólido.

En módulo (el ángulo entre $\vec{r}_i$ y $\vec{v}_i$ es de 90°):

$$L_i = r_i m_i v_i$$

Calculando la proyección sobre el eje de giro:

$$L_{iz} = L_i \cos(90 - \alpha_i) = L_i \sin(\alpha_i) = r_i m_i v_i \sin(\alpha_i)$$

Por tanto, el radio de giro R_i y la velocidad lineal v_i de la partícula i quedan:

$$R_i = r_i \sin(\alpha_i)$$

$$v_i = \omega R_i$$

Sustituyendo en la ecuación de L_{iz} :

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega$$

Para todo el sólido rígido:

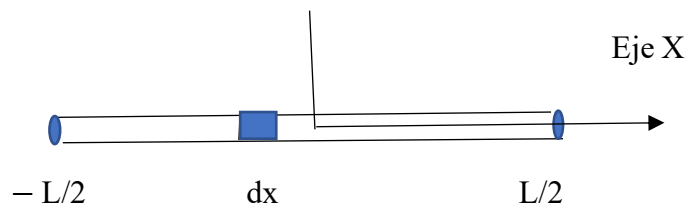
$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega = I \omega$$

El sumatorio $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ se denomina **momento de inercia** del sólido con respecto al eje de giro. Sus unidades SI son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

En el caso de un objeto continuo de volumen V y masa m , (se debe imaginar que el objeto está compuesto por muchos pequeños trocitos suficientemente pequeños para poder ser considerados como partículas), el momento de inercia se calculará como una integral:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Ejemplo: Calcular el momento de inercia de una varilla de longitud L y densidad ρ .



Supondremos que el diámetro de la varilla es despreciable en comparación con su longitud L .

El momento de inercia:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Calculando dm:

$$\rho = \frac{m}{\Delta x} \Rightarrow m = \rho \Delta x \Rightarrow dm = \rho dx$$

Integrando:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho dx = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho \frac{L^3}{12}$$

Si la varilla tiene una masa $M = \rho L$, entonces:

$$I = M \frac{L^2}{12}$$

En general, el vector momento angular de un sólido con respecto a un eje de giro no es paralelo a dicho eje, por lo que la proyección de $\vec{L}$ sobre el eje no coincide con su módulo. Sin embargo, para cualquier sólido existen al menos 3 ejes, llamados ejes principales de inercia, tales que si el sólido gira con respecto a alguno de ellos, el momento angular es paralelo al eje y la proyección de $\vec{L}$ sobre dicho eje coincide con su módulo.

Si el sólido presenta ejes de simetría, los ejes principales de inercia coinciden con ellos, y si el sólido gira alrededor de alguno de ellos, se cumple que:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

La variación del estado de rotación de un sólido viene dada por la variación de su momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

Donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular. Además, como $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext}$, podemos poner:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I \vec{\alpha}$$

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación, análoga a la 2ª ley de Newton de la dinámica.

Radio de giro

Para cualquier cuerpo rígido es posible encontrar una distancia al eje considerado, a partir de la cual puede suponerse concentrada toda la masa del sólido sin que se modifique su momento de inercia a dicho eje. Esa distancia se conoce como **radio de giro** y suele representarse con K: La ecuación:

$$I = mK^2$$

5.2. Teorema de Steiner. Teorema de los ejes paralelos

Si I es el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje que pasa por el centro de masas, puede calcularse el momento de inercia I' respecto a otro eje paralelo al anterior, a través de la expresión:

$$I' = I + md^2$$

Donde m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre ambos ejes.

Algunos momentos de inercia importantes:

Momentos de inercia de cuerpos uniformes de diversas formas		
Capa cilíndrica respecto a su eje		$I = MR^2$
Cilindro sólido respecto a su eje		$I = \frac{1}{2}MR^2$
Cilindro hueco respecto a su eje		$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Capa cilíndrica respecto a un diámetro que pasa por su centro		$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Cilindro macizo respecto a un diámetro que pasa por su centro		$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Varilla delgada respecto a una recta perpendicular que pasa por su centro		$I = \frac{1}{12}ML^2$
Varilla delgada respecto a una recta perpendicular que pasa por su extremo		$I = \frac{1}{3}ML^2$
Capa o corteza esférica delgada respecto a un diámetro		$I = \frac{2}{3}MR^2$
Esfera maciza respecto a un diámetro		$I = \frac{2}{5}MR^2$
Paralelepípedo rectangular macizo respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a una cara		$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Cuando el eje de rotación de un sólido no está fijo, su movimiento será una combinación de rotación y traslación. En tal caso, para describir el movimiento son necesarias dos ecuaciones, una que nos permita calcular la aceleración de su centro de masas y otra que dé su aceleración angular con respecto a un eje que pasa por su centro de masas:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cdm}$$

$$\sum \vec{r}' \times \vec{F}_{ext} = I \vec{\alpha}'$$

La prima (') denota que las magnitudes están calculadas con respecto al centro de masas.

En resumen, la forma de analizar el movimiento de un sólido rígido:

Traslación: $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cdm}$

Rotación. $\sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I \vec{\alpha}$

5.3. Trabajo de rotación. Energía cinética de rotación

Energía cinética de rotación: $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$

Trabajo de rotación: $W_{12} = \Delta E_c = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$

Por tanto, a la hora de estudiar la energía cinética del sólido rígido:

$$E_{cinética\ total} = \frac{1}{2} m v_{cdm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

6. Conservación del momento lineal y angular

6.1. Principio de conservación del momento lineal

La segunda ley de Newton para un sistema de partículas establece, como ya vimos anteriormente:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Si $\vec{F}_{ext} = 0$, entonces $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ también, de lo que se sigue que la cantidad de movimiento total no cambia en el tiempo, es decir, se conserva, y se cumple que:

$$\vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}$$

Es decir, **cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.**

La conservación de la cantidad de movimiento es especialmente útil a la hora de estudiar las colisiones.

Una colisión es una interacción entre dos o más objetos o sistemas de partículas que tiene lugar en un intervalo corto de tiempo y en una región delimitada del espacio. Solo consideraremos los objetos antes y después de la colisión, y también que durante el tiempo en el que esta ocurre, el impulso debido a las fuerzas externas es despreciable.

Las colisiones se pueden clasificar en:

- **Colisiones elásticas:** Se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema. Por tanto:

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right)_{inicial} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right)_{final}$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_{inicial} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_{final}$$

- **Colisiones inelásticas:** en este caso se conserva la cantidad de movimiento, pero no la energía cinética.

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right)_{inicial} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right)_{final}$$

Un caso especial de colisión inelástica es aquel en el que los **objetos permanecen unidos tras la colisión**. En este caso hablamos de **colisión totalmente inelástica**. En este caso, solo existe una velocidad final, que puede ser calculada a partir de la conservación de la cantidad de movimiento.

Las colisiones, en general, no son totalmente elásticas ni inelásticas. Por ello, se define el **coeficiente de restitución (e)** como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad de aproximación de las partículas. Por ejemplo, en el caso de una colisión entre 2 partículas en una misma dirección, el coeficiente de restitución se calcula:

$$e = \frac{v_{2final} - v_{1final}}{v_{2inicial} - v_{1inicial}}$$

Nos da una medida cuantitativa del grado de elasticidad de la colisión: su valor está comprendido entre 0 (colisión totalmente inelástica) y 1 (colisión elástica).

6.2. Principio de conservación del momento angular

Como ya sabemos, el momento total de las fuerzas externas y el momento angular están relacionados como:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Cuando $\vec{M} = 0$, resulta que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) = 0$$

Cuando la derivada temporal de una magnitud es cero, dicha magnitud permanece constante en el tiempo, por tanto:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = cte$$

Es decir, aunque los momentos angulares individuales de las partículas pueden cambiar, su suma no puede cambiar, así que este resultado también lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}$$

Por tanto, cuando el momento total de las fuerzas externas sobre un sistema de partículas respecto a algún punto es cero, el momento angular del sistema respecto a dicho punto permanece constante.

Un caso particularmente interesante de conservación del momento angular es el de las fuerzas centrales, que ya hemos estudiado previamente en otro apartado de este tema.